- 5 -

PÉNDULO SIMPLE

OBJETIVO.

Determinación del valor de la aceleración de la gravedad, *g*, utilizando un péndulo simple.

MATERIAL.

- Péndulo.
- Cronómetro.
- Dispositivo para variar la longitud del péndulo.
- Regla graduada.

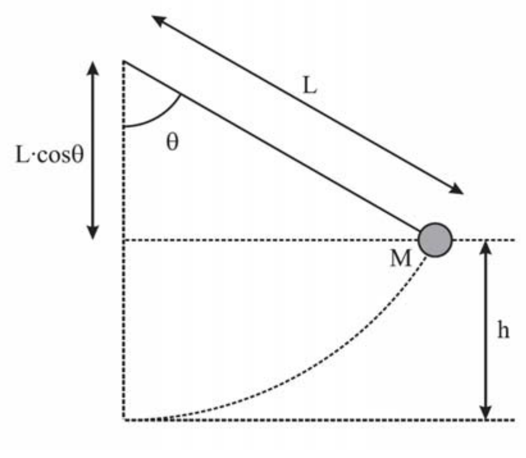
FUNDAMENTO TEÓRICO.

Se basa en la fórmula que relaciona el periodo, *T*, del movimiento oscilatorio efectuado por un péndulo simple (para pequeñas oscilaciones y en ausencia de rozamiento) y su longitud, *L*, con la aceleración de la gravedad:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{L/g} \qquad (1)$$

El péndulo simple se compone de una masa que se pueda considerar puntual, *M*, suspendida de un hilo de masa despreciable y longitud *L*, que gira libremente alrededor de su extremo superior. Para obtener la frecuencia de oscilación del péndulo aplicaremos el principio de conservación de la energía. Siguiendo la notación de la figura, la desviación se mide por el ángulo θ que forma el hilo con la vertical. Cuando el hilo se desvía dicho ángulo, la masa se eleva una altura *h*:

$$h = L - L\cos\theta \qquad (2)$$



Por otra parte la trayectoria del péndulo es un arco de circunferencia de radio L, por lo que su velocidad es:

$$v = L\,(d\theta / dt) \tag{3}$$

Aplicando la conservación de la energía, la suma de la energía cinética y de la potencial debe ser constante en todo punto de la trayectoria:

$$E = 1/2\ M v^2 + Mgh \tag{4}$$

Sustituyendo h y v por sus expresiones se llega a:

$$E = 1/2\ ML^2 (\,d\theta / dt)^2 + MgL\,(1 - \cos\theta\,) \tag{5}$$

Derivando la ecuación anterior con respecto a t el primer miembro se anula. Simplificando se obtiene la ecuación del movimiento :

$$d^2\theta / dt^2 + (g / L)\,\mathrm{sen}\ \theta = 0 \tag{6}$$

Para ángulos pequeños ($\theta <$ 10º) el seno puede sustituirse por el ángulo en radianes y se llega a una ecuación cuya solución es la de un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω y periodo T:

$$d^2\theta / dt^2 + (g / L)\,\theta = 0 \tag{7}$$

$$\theta = \theta_{\max}\,\mathrm{sen}\,(\omega\, t + \varphi) \tag{8}$$

$$\omega = \sqrt{g / L}\,,\ \ T = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{L / g} \tag{10}$$

NOTA: Del desarrollo de sen$\theta = \theta - \theta^3/ 6 + \ldots$, se deduce que para ángulos grandes empiezan a tener importancia los siguientes términos y la ecuación (6) hasta el segundo término se convierte en:

$$d^2\,\theta / dt^2 + (g / L)\ \theta - (g / 6L)\ \theta^3 = 0 \tag{11}$$

que es la ecuación de un oscilador anarmónico de grado 3. La solución de este tipo de ecuaciones viene dada por la superposición de una oscilación de frecuencia ω (frecuencia fundamental) y otras de menor amplitud, de frecuencia múltiplo de la fundamental, que se llaman sus armónicos. En el caso de la ecuación (10) aparece principalmente el tercer armónico y no el segundo que aparecería en el caso de una ecuación que incluyera un término en θ^2. La solución de la ecuación (6) es siempre aproximada y se resuelve no teniendo en cuenta los términos considerados en cada caso “pequeños”. Una solución aproximada de este tipo de ecuación diferencial se denomina solución de perturbación porque al añadir un término “pequeño” a la ecuación diferencial perturba el movimiento que se tendría sin él. Encontraremos muchos ejemplos de esto a lo largo de la física.

MODO DE OPERAR.

Se dispone el péndulo con la máxima longitud del hilo que lo sujeta. Se separa de su posición de equilibrio y se deja oscilar libremente, evitando todo movimiento lateral del mismo. Cuando la oscilación sea de amplitud pequeña, se cronometra la duración de 30 oscilaciones completas (una oscilación: ida y vuelta al origen). Se repite cuatro veces esta medida sin cambiar la longitud.
A continuación se cambia la longitud y se realizan cuatro medidas del nuevo periodo. Ídem hasta cuatro longitudes diferentes. Tómense valores para la longitud máxima (en torno a 90 cm), para la mínima (en torno a 20 cm) y 2 puntos intermedios. Recuérdese que la longitud del péndulo se mide desde el extremo fijo al centro de la esfera.

RESULTADOS EXPERIMENTALES.

1. Construir una tabla con los cuatro valores de L y para cada L los cuatro valores obtenidos del tiempo cronometrado de treinta oscilaciones, t. Debajo de cada columna escribir el valor medio de los correspondientes tiempos, y su desviación típica.

2. Hallar la incertidumbre de t correspondiente a cada longitud. Tener en cuenta la incertidumbre aleatoria y el error sistemático de precisión (precisión del cronómetro). Aplicar la expresión dada en clase para medidas directas.

3. Expresar los correspondientes periodos junto con sus incertidumbres absolutas y relativas, recordando que $T = \dfrac{t}{\text{Numero de oscilaciones}}$.

4. Estimar la incertidumbre absoluta y relativa de cada longitud. (Si solo se hace una medida de L, la incertidumbre se determinará a partir de la precisión de la regla utilizada, así como de otros posibles sesgos que puedan aparecer en el proceso de medida de L).

5. Determinar g para las medidas de mayor y menor longitud. Estimar su incertidumbre como medida indirecta realizada a través de la medida de L y de T.

6. Representar gráficamente T^2 frente a L.

7. Ajustar los puntos experimentales anteriores a una recta por mínimos cuadrados, utilizar la ecuación general de la recta, sin presuponer que pasa por el origen.

8. Determinar g a partir de la pendiente de la recta $y = m{\cdot}x+c$. (Si las medidas están bien realizadas, el valor de c es muy cercano a 0). Calcular la incertidumbre de la pendiente, Δm, y de la ordenada en el origen, Δc, por medio de las fórmulas dadas en clase. Hallar la incertidumbre de g. Comparar el valor de g obtenido y su incertidumbre con el del apartado 4.

9. Discutir brevemente los resultados. Comparar los puntos 5 y 8.

NOTA: Expresar los resultados finales en unidades S.I. y convenientemente redondeados, teniendo en cuenta sus incertidumbres.