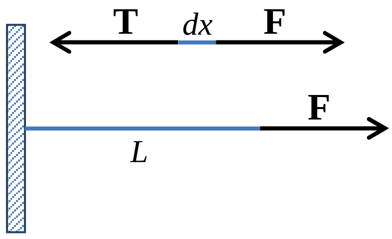
-28-

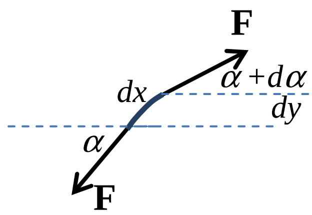
ONDAS ESTACIONARIA. CUERDA VIBRANTE

FUNDAMENTO TEÓRICO

Ondas Estacionarias: Cuerda vibrante



Considérese una cuerda de longitud L que está sujeta por un extremo a la pared y por el otro, una fuerza **F** la mantiene tensa. En estas condiciones, cualquier elemento, dx, de la cuerda, que se elija está en equilibrio. La misma tensión (fuerza) **F** = **T** actúa en ambas direcciones. Sin embargo, si empezamos a hacer oscilar el extremo libre de la cuerda, en el que está aplicada la fuerza **F**, entonces la cuerda se ondea y ahora cada elemento dx de longitud ya no está en equilibrio, como se ilustra en la figura adjunta. Las componentes horizontal y vertical que actúan sobre un elemento dx de la cuerda, son:



$$F_x = F \cdot \cos(\alpha + d\alpha) - F \cdot \cos\alpha$$
$$F_y = F \cdot sen(\alpha + d\alpha) - F \cdot sen\,\alpha$$

En donde α es el ángulo que, a una distancia x de la pared, forma la fuerza **F** con el eje X (la horizontal). Evidentemente, será

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Como $\alpha \ll 1$, en todos los puntos de la cuerda, puede aproximarse la tangente ó el seno por el ángulo. Esto es: $\mathrm{tg}\,\alpha \cong \mathrm{sen}\,\alpha \cong \alpha$. (por el mismo argumento, $\cos\alpha \approx 0$, y no hay componente neta de la fuerza en la dirección horizontal)

La variación del ángulo α con la distancia x, vendrá dada por:

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \underbrace{=}_{\alpha = \frac{dy}{dx}} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

Y por tanto, la componente vertical de la fuerza es:

$$F_y = F \cdot sen(\alpha + d\alpha) - F \cdot sen\,\alpha \;=\; F(sen(\alpha + d\alpha) - sen\,\alpha) = F d\alpha \;=\; F\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx\,.$$

Por otra parte, la masa, dm, del elemento dx, vale: $dm = \rho S dx$, siendo ρ la densidad de masa, y S la sección transversal de la cuerda. La ecuación de movimiento será: $F_y = dm\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$; $F\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \rho S dx\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Obteniéndose finalmente,

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{F/\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}, \text{ con } \boxed{\mathrm{v}^2 = F/\mu}.$$

Siendo $\mu = \alpha \cdot S$ la densidad de masa por unidad de longitud de la cuerda y v la velocidad de propagación de la onda. Esta ecuación aparece usualmente escrita de la forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},$$

y se conoce como ecuación de ondas. La solución de la ecuación de ondas es siempre de la forma $y(x,t) = f(kx \mp \omega t)$, como puede demostrarse fácilmente. En efecto, sea $z = kx \mp \omega t$, tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \mp\omega\frac{\partial f}{\partial z}; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mp\omega\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial t} = \omega^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = k\frac{\partial f}{\partial z}; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x} = k^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Sustituyendo las derivadas segundas en la ecuación de onda, se concluye que,

$$\boxed{\mathrm{v} = \omega / k}$$

y que la función, $y(x,t) = f(kx \mp \omega t)$, es siempre solución de la ecuación de ondas.

¿Qué diferencia hay entre las soluciones, $y(x,t) = f(kx \mp \omega t)$, con distinto signo?

Respondámonos a la siguiente pregunta: Si en un determinado instante de tiempo t_o y en una determinada posición x_o, el valor de la función es $y_o(x_o, t_o) = f(kx_o \mp \omega t_o)$, al cabo del intervalo de tiempo Δt, ¿cuánto ha de valer Δx para obtener el mismo valor y_o? Esto es:

$$f(kx_o \mp \omega t_o) = f(k(x_o + \Delta x) \mp \omega(t_o + \Delta t)),$$

para ello tendrá que cumplirse que $k\Delta x \mp \omega \Delta t = 0$, es decir: $\Delta x = \pm(\omega/k)\Delta t = \pm \mathrm{v}\Delta t$. Luego el signo (−) en la ecuación de partida conduce a $\Delta x = +\mathrm{v}\Delta t > 0$, que indica un desplazamiento positivo. Mientras que el signo (+) conduce a $\Delta x = -\mathrm{v}\Delta t < 0$, que es un desplazamiento en la dirección negativa del eje X.

La solución de la ecuación de ondas bien conocida de todos es:

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(kx \mp \omega t + \varphi)}.$$

Una onda estacionaria es el resultado de la superposición de dos movimientos ondulatorios armónicos de igual amplitud y frecuencia que se propagan en sentidos opuestos a través de un medio. La onda estacionaria NO ES una onda viajera, puesto que su ecuación no contiene ningún término de la forma $kx - \omega t$. Por sencillez, tomaremos como ejemplo para ilustrar la formación de ondas estacionarias el caso de una onda transversal que se propaga en una cuerda sujeta por sus extremos en el sentido de izquierda a derecha (→); esta onda incide sobre el extremo derecho y se produce una onda reflejada que se propaga en el sentido de derecha a izquierda (←). La onda reflejada tiene una diferencia de fase de π radianes respecto de la onda incidente. La superposición de las dos ondas, incidente y reflejada, da lugar, en ciertas condiciones, a una onda estacionaria.

Onda incidente, sentido (→): $y_1 = \cos(kx - \omega t)$
Onda reflejada, sentido (←): $y_2 = \cos(kx + \omega t + \pi)$

En estas ecuaciones, k representa el número de ondas $k = 2\pi/\lambda$ y ω es la frecuencia angular, $\omega = 2\pi/T$, siendo λ y T, respectivamente, la longitud de onda y el periodo.

La superposición de ambas ondas, incidente y reflejada, conduce a:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t + \pi) = \\ &= A(\cos kx \cdot \cos \omega t + \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} \omega t) + A(\cos kx \cdot \underbrace{\cos(\omega t + \pi)}_{-\cos \omega t} - \operatorname{sen} kx \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(\omega t + \pi)}_{-\operatorname{sen} \omega t}) = \\ &= 2A \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

El término senωt representa la dependencia temporal, mientras que $2A$senkx es la amplitud, la cual, obviamente, depende de la posición x. Es decir, los distintos puntos de la cuerda vibran con la misma frecuencia angular ω pero con diferentes amplitudes, que no dependen del tiempo.

Significado físico de la superposición expresada por la ecuación:

$$\boxed{y(x,t) = 2A \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} \omega t}.$$

Como los puntos extremos de la cuerda están fijos por hipótesis, la vibración en ellos tiene que ser nula; es decir, si la cuerda donde se propagan las ondas tiene longitud L, en los extremos $x = 0$ y $x = L$ han de verificarse en cualquier instante las condiciones siguientes:

$y(0) = 2A \operatorname{sen} k0 \cdot \operatorname{sen} \omega t = 0$ e $y(L) = 2A \operatorname{sen} kL \cdot \operatorname{sen} \omega t = 0$,

Y como ha de ser cero para cualquier valor de t, tendrá que ser:
$\operatorname{sen} kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi, n \in Z$ (conjunto de los números enteros), por tanto,

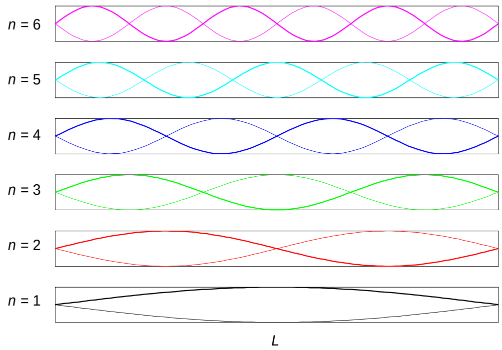
$$\frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi;\ L = n\frac{\lambda}{2}, n \in Z\ .$$

Es decir, solo aparecen ondas estacionarias cuando la longitud de la cuerda sea un múltiplo exacto de la semi-longitud de onda.

Como la longitud de onda está relacionada con la frecuencia $\nu = 1/T$, a través de la expresión $\mathrm{v} = \omega / k = \nu \cdot \lambda$. La expresión anterior se puede también expresar como

$$\boxed{\nu = n\frac{\mathrm{v}}{2L}}.$$

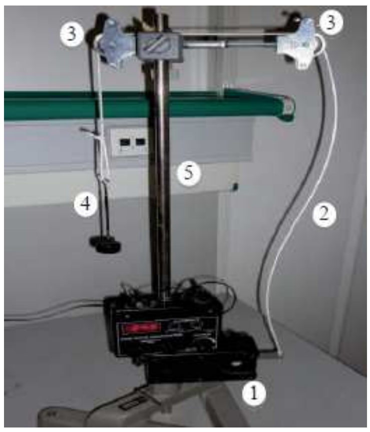
La siguiente grafica representa distintos modos de oscilación de una cuerda de longitud L.



Experimento

Materiales y montaje

El montaje de esta experiencia es sencillo, requiriendo elementos de fácil adquisición. Para la implementación que se muestra en la fotografía se ha usado el siguiente material:



1. Un generador de frecuencias Pasco-WA9867 alimentando a un oscilador Pasco-WA9857.
2. Una cuerda elástica.
3. Dos poleas.
4. Un soporte para pesas y varias pesas, para ajustar la tensión de la cuerda.
5. Un soporte ajustable en altura para el oscilador y la polea.

Para montar la experiencia, sólo hay que fijar el oscilador a la parte baja del soporte y las poleas a la parte alta. Posteriormente, se ata un extremo de la cuerda a la lengüeta del oscilador y el otro extremo, tras pasarlo por las poleas, se ata al soporte para pesas, en el que se pueden colocar pesas de distinta masa.

Datos de los elementos utilizados

Longitud de la cuerda	L = 82 cm
Masa de la cuerda	M = 3.5 g
Densidad de la cuerda	μ = 4.2 g/m
Peso del soporte porta pesas	$T_{soporte}$ = 50g· 9.8 m/s^2 = 490 N
Valor medio de cada una de las pesas	T_{pesa} = 50g· 9.8 m/s^2 = 490 N
Extensión de la cuerda por cada pesa añadida	ΔL = 0.7 cm
Longitud de la cuerda entre el vibrador y la polea	ℓ = 58 cm

Descripción

Se situará en el soporte (50 g) 1.- una, 2.- dos o 3.- tres pesas (50 g) en el soporte. Para cada uno de los tres casos, determine:

- Frecuencias, ν_n, n = 1, 2, 3 y 4, para las que, respectivamente, se producen 1, 2, 3 y 4 nodos en la cuerda.
- Velocidades de propagación de la onda en la cuerda para cada una de las frecuencias, ν_n, anteriores.
- Tensión de la cuerda en cada caso